Vektoren in der Ebene – Rechnen mit Vektoren

Informationsblatt

Ein Vektor in der Ebene wird durch die Koordinaten zweier Punkte festgelegt:

Beispiel: $P_1\,(+7/+2)$, $P_2(+3/-4)$; $P_1\begin{pmatrix}+7\\+2\end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix}+3\\-4\end{pmatrix}$;

Angabe in *Zeilenform* oder in *Spaltenform*

$$\overrightarrow{P1P2} = \vec{p} = \begin{pmatrix}+3 & -7\\-4 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}; \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix};$$

Spitze minus Schaft!

Die Länge / den Wert eines Vektors berechnen:

Beispiel: $\vec{p} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{p}| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36}$; $|\vec{p}| = \sqrt{52}$; $\mathbf{|\vec{p}| = 7{,}21}$

Addition und Subtraktion von Vektoren:

Beispiel: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\+1\end{pmatrix}$; $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}-5\\+1\end{pmatrix}$;

$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\+2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\+3\end{pmatrix}$; $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\+3\end{pmatrix}$;

Den Vektor mit einem ***Skalar multiplizieren****:*

Wenn ein Vektor das Vielfache eines anderen Vektors ist, dann sind diese Vektoren zueinander parallel!

Beispiel: $\mathbf{c = 3} \rightarrow \mathbf{3}\,.\,\vec{r} = \mathbf{3}\,.\begin{pmatrix}+5\\+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{3}\,.+5\\\mathbf{3}\,.+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{+15}\\\mathbf{+9}\end{pmatrix}$

Der zum Vektor $\vec{a}$ parallele Vektor $\vec{a}_0$ heißt Einheitsvektor des Vektors $\vec{a}$! Den Einheitsvektor bestimmt man mit der Formel: $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|}.\,\vec{a}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\+2\end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}.\,\vec{a} \rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\,.\begin{pmatrix}-3\\+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}83\\+0.55\end{pmatrix}$

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}+1\\+2\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}+3\\+1\end{pmatrix}$; $\rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.|\vec{b}|}$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \begin{pmatrix}+1\\+2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+3\\+1\end{pmatrix} = 3 + 2 = \underline{5}$ || $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ || $|\vec{b}| = \sqrt{10}$

$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.|\vec{b}|}$ $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{10}}$; $\underline{\alpha = 45°}$