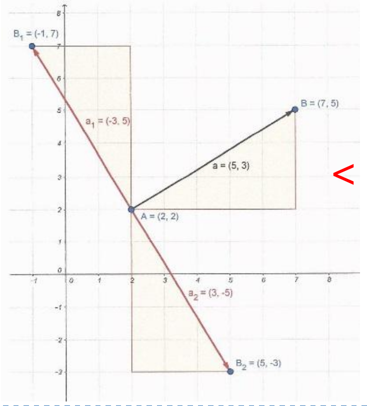
Vektoren – Normalvektoren und Normalprojektion

Lösungsblatt 1

Normalvektor und Normalprojektion eines Vektors auf einen anderen Vektor:



Durch die Drehung des Vektors $\vec{a}\begin{pmatrix} xa \\ ya \end{pmatrix}$ um + 90° bzw. – 90° geht dieser Vektor in die Normalvektoren $\vec{a}_1\begin{pmatrix} -ya \\ +xa \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2\begin{pmatrix} +ya \\ -xa \end{pmatrix}$ über.

< << **Beispiel:** A(+2/+2); B(+7/+5); $\rightarrow$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} +5 \\ +3 \end{pmatrix}$;

+ 90°: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ +5 \end{pmatrix}$; $B_1 = A + \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} +2 \\ +2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ +5 \end{pmatrix}$; $B_1(-1/+7)$;

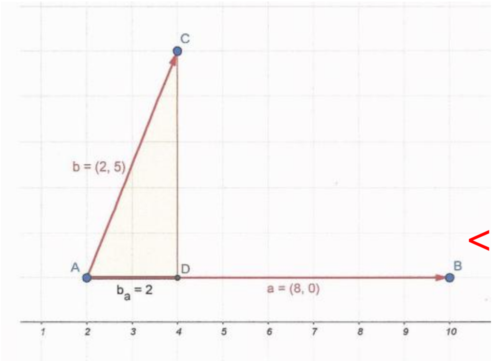
– 90°: $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} +3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $B_2 = A + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} +2 \\ +2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $B_2(+5/-3)$;

Ermitteln Sie von den gegebenen Vektoren die Normalvektoren!

$\vec{b} = \begin{pmatrix} +4 \\ -3 \end{pmatrix}$; + 90°: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} +3 \\ +4 \end{pmatrix}$; – 90°: $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ +4 \end{pmatrix}$; + 90°: $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; – 90°: $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} +4 \\ +1 \end{pmatrix}$;

$\vec{d} = \begin{pmatrix} +2 \\ +5 \end{pmatrix}$; + 90°: $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ +2 \end{pmatrix}$; – 90°: $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} +5 \\ -2 \end{pmatrix}$;



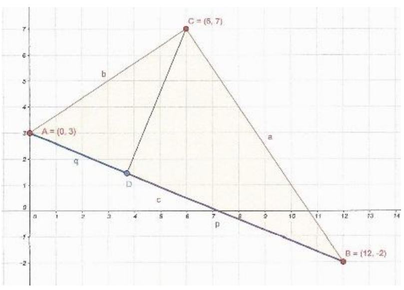
Wird vom Endpunkt C des Vektors $\vec{b}$ eine Normale auf den Vektor $\vec{a}$ errichtet, so erhält man den Punkt D bzw. die Strecke AD. Die Länge dieser Strecke ist die Normalprojektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$. $\rightarrow$ $b_a = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|}$

< << **Beispiel:**

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = (8\,.\,2) + (5\,.\,0) = \underline{16}$

$|a| = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = \underline{8}$

$b_a = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{16}{8} = \underline{2;}$ $\underline{b_a = 2}$



Von einen Dreieck sind die Eckpunkte bekannt: A(0/3), B(12/-2) und C(6/7). Beweisen Sie, dass es sich um ein rechtwinkeliges Dreieck handelt, und berechnen Sie die Hypotenusenabschnitte q und p!

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6-12 \\ 7-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ +9 \end{pmatrix}$;

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6 \\ +4 \end{pmatrix}$;

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12-0 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$;

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ +9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} +6 \\ +4 \end{pmatrix} = -36 + 36 = 0$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$, daher ist das ▲ ABC rechtwinkelig.

$\vec{b}\,.\,\vec{c} = \begin{pmatrix} +6 \\ +4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} +12 \\ -5 \end{pmatrix} = 72 - 20 = 52$

$|\vec{c}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = \underline{13}$

$q = \frac{\vec{b}\,.\,\vec{c}}{|c|} = \frac{52}{13} = \underline{4;}$ $\underline{q = 4}$ p = c – q = 13 – 4; $\underline{p = 9}$