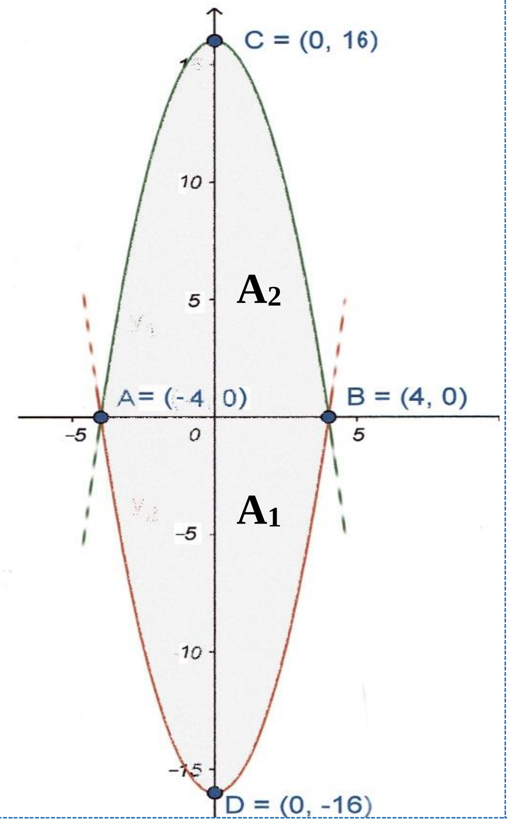
Maturabeispiele – Flächeninhalt einer Polynomfunktion

Lösungsblatt 21: Seite 1

Eine Spiegelfläche ist durch die beiden Funktionen zweiten Grades umschrieben. Der Graph y_1 geht durch die Punkte A(-4/0), B(+4/0) und C(0/+16), der Graph y_2 geht durch die Punkte A(-4/0), B(+4/0) und C(0/-16). Erstellen Sie die Funktionsgleichungen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ und berechnen Sie die Fläche des Spiegels im Intervall [– 4 | + 4].

Anmerkung: *$f(x_1)$ und $f(x_2)$ sind symmetrisch bezüglich der x-Achse! Angaben in dm!*

$f(x_1)$: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	I.: $16 \cdot a - 4 \cdot b + 16 = 0$	II: $16 \cdot a + 4 \cdot b + 16 = 0$
I.: $0 = 16 \cdot a - 4 \cdot b + c$	$\underline{\text{II: } 16 \cdot a + 4 \cdot b + 16 = 0}$	$16 \cdot (-1) + 4 \cdot b + 16 = 0$
II: $0 = 16 \cdot a + 4 \cdot b + c$	I + II: $32 \cdot a + 32 = 0$	$+ 4 \cdot b = 0$
III: $16 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \rightarrow \underline{c = 16}$	$\underline{a = -1}$	$\underline{b = 0}$



$f(x_1)$: $y_1 = -x^2 + 16$; $A_1 = 2 \cdot \int_0^{+4} f(x1) \cdot dx$

$f(x_1)$ und $f(x_2)$ sind symmetrisch bezüglich der x-Achse, daher:

$f(x_2)$: $y_2 = +x^2 - 16$; $A_2 = 2 \cdot \int_0^{-4} f(x1) \cdot dx$

Berechnung des Flächeninhalts:

$$A_1 = 2 \cdot \int_0^{+4} f(x) \cdot dx = 2 \cdot \left| \left(-\frac{1}{3} \cdot x^3 + 16 \cdot x \right) \right|_0^{+4}$$

$$A_1 = 2 \cdot \left(-\frac{64}{3} + 64 \right) + 0$$

$$A_1 = 2 \cdot \left(-\frac{64}{3} + \frac{192}{3} \right) = \frac{128 \cdot 2}{3}; \quad \mathbf{A_1 = 85\,\tfrac{1}{3}\ dm^2}$$

$f(x_1)$ und $f(x_2)$ sind symmetrisch bezüglich der x-Achse, daher:

$$A_1 = A_2 \quad \rightarrow \quad A = 2 \cdot 85\,\frac{1}{3}; \quad \mathbf{A = 170\,\tfrac{2}{3}\ dm^2}$$