Vektoren im Raum – Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen

Lösungsblatt 1

Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch die Eckpunkte A, B und D gegebenen Parallelogramms

mit der vektoriellen Flächenformel $A = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ und mit Hilfe des **Vektorprodukts!**

Beispiel: A(-2/0/4), B(-2/3/3), D(2/3/5)

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} -2 - (-2) \\ 3 - 0 \\ 3 - 4 \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 - (-2) \\ 3 - 0 \\ 5 - 4 \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} = +0 + 9 - 1 = 8$$

$$A = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$A = \sqrt{10 \cdot 26 - 8^2}$$

$$A = \sqrt{196} \quad \underline{\underline{A = 14 \text{ FE}}}$$

Berechnung mit dem Vektorprodukt!

Anmerkung: Der Wert des Vektorprodukts ergibt den Flächeninhalt des durch die beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ +3 \\ -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +4 \\ +3 \\ +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +6 \\ -4 \\ -12 \end{vmatrix}$$

$$n_x = 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = +6$$

$$n_y = -[0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)] = -4$$

$$n_z = 0 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = -12$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-12)^2}$$

$$A = \sqrt{196} \quad \underline{\underline{A = 14 \text{ FE}}}$$

A(-3/2/5), B(2/-3/4), D(5/4/3)

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 2 - (-3) \\ -3 - 2 \\ 4 - 5 \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 5 - (-3) \\ 4 - 2 \\ 3 - 5 \end{vmatrix} \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} +8 \\ +2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{51}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} +8 \\ +2 \\ -2 \end{vmatrix} = +40 - 10 + 2 = 32$$

$$A = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$A = \sqrt{51 \cdot 72 - 32^2}$$

$$A = \sqrt{2648} \quad \underline{\underline{A = 51,44 \text{ FE}}}$$

Berechnung mit dem Vektorprodukt!

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +8 \\ +2 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +12 \\ +2 \\ +40 \end{vmatrix}$$

$$n_x = (-5) \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = +12$$

$$n_y = -[5 \cdot (-2) - 8 \cdot (-1)] = +2$$

$$n_z = 5 \cdot 2 - 8 \cdot (-5) = +50$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = \sqrt{12^2 + 2^2 + 50^2}$$

$$A = \sqrt{2648} \quad \underline{\underline{A = 51,44 \text{ FE}}}$$