Funktionen – Differentialrechnungen

Lösungsblatt 3

*Eine Funktion **f(x): $y = a.x^3 + bx^2 + cx + d$** hat die Extremstellen E1(+1/-4) und E2(-1/0). Wie lautet die Funktionsgleichung f(x)? Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen **N**, des Wendepunktes **W** und die Wendetangente t_w!*

f(x): $y = a.x^3 + b.x^2 + cx + d$ → f´(x): $y´ = 3.a.x^2 + 2.b.x + c$ → f´´(x): $y´´ = 6.a.x + 2.b$

Aufstellung der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte: E1(+1/-4) und E2(-1/0)

f(+1) = – 4 $E_1 \in$ f(x) I: $-4 = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ → I: $-4 = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d$

f(–1) = 0 $E_2 \in$ f(x) II: $0 = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ → II: $0 = a.(-1)^3 + b.(-1)^2 + c.(-1) + d$

E_1: f´(+1) = 0 III: $0 = 3.a.x^2 + 2.b.x + c$ → III: $0 = 3.a.1^2 + 2.b.1 + c$

E_2: f´(–1) = 0 IV: $0 = 3.a.x^2 + 2.b.x + c$ → IV: $0 = 3.a.(-1)^2 + 2.b.(-1) + c$

I: $+a + b + c + d = -4$

II: $-a + b - c + d = 0$

I+II: $2.b + 2.d = -4$

$2.0 + 2.d = -4$

$+2.d = -4$

$\underline{d = -2}$

III: $+3.a + 2.b + c = 0$

IV: $+3.a - 2.b + c = 0$ | . (–1)

III+IV: $4.b = 0$ | : 4 → $\underline{b = 0}$

III: $+3.a + 2.0 + c = 0$ → $c = -3.a$

I: $+a + b + c + d = -4$ → $c = -3.a$

$+a + 0 - 3a - 2 = -4$ → $\underline{c = -3}$

$-2.a = -2$ → $\underline{a = +1}$

Die Funktionsgleichung lautet: f(x): $y = a.x^3 + bx^2 + cx + d$ → $y = 1.x^3 + 0.x^2 + (-3) . x + (-2)$

Die Ableitungen: **f(x): $y = x^3 - 3x - 2$**; → f´(x): $y´ = 3x^2 - 3$; → f´´(x): $y´´ = 6x$;

*Berechnung der Nullstellen: **N** → f(x) = 0*

f(x): $y = x^3 - 3x - 2$ $\underline{\mathbf{x_1 = -1}}$

$(x^3 - 3x - 2) : (x + 1) = \underline{x^2 - x - 2}$

$\underline{\pm x^3 \pm x^2}$

$-x^2 - 3x$

$\underline{\mp x^2 \mp x}$

$-2x - 2$

$\underline{\mp 2x \mp 2}$

0 0 $\underline{\mathbf{x_1 = -1}}$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_{2,3} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; → $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$

$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$; → $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\underline{\mathbf{x_2 = +2}}$ $\underline{\mathbf{x_{3(1)} = -1}}$

$\underline{\mathbf{N_1 = (+2/0);}}$ $\underline{\mathbf{N_2 = (-1/0);}}$

*Berechnung des Wendepunktes: **W** → f´´(x) = 0*

f´´(x): $y´´ = 6x$; $6x = 0$; $\underline{\mathbf{x = 0}}$

f(x): $y = x^3 - 3x - 2$

$y = 0^3 - 0x - 2$; $\underline{\mathbf{y = -2}}$ $\underline{\mathbf{W = (0/-2)}}$

Berechnung der Tangente t_w: $y = k.x + d$;

Steigung der Tangente in W(+1/-16) → f´(x_w) = k_t

f´(x): $y´ = 3x^2 - 3$

$y´ = k = 3.0^2 - 3$

$\underline{k = -3}$

t_w: $y = k.x + d$ → $-2 = (-3).0 + d$ → $\underline{d = -2}$

$\underline{\mathbf{t_w:\ y = -3x - 2}}$