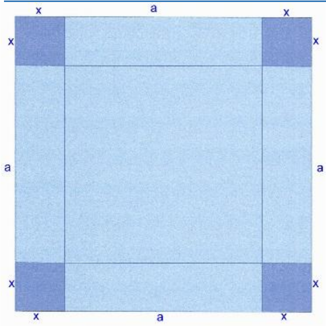
Funktionen – Extremwertaufgaben

Lösungsblatt 2

Aus einem quadratischen Blechstück mit der Seitenlänge a = 16 cm soll eine quaderförmige Dose mit maximalem Volumen hergestellt werden. An den Ecken werden gleich große Quadrate mit der Seite x ausgeschnitten. Berechnen Sie x und das Volumen der Dose!



1. Hauptbedingung: **V = G . h** → V *soll möglichst groß sein!*
2. Nebenbedingung: a = 16 – 2x; h = x;
3. Erstellung einer Zielfunktion f(x) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$$V = G \cdot h \quad \rightarrow \quad V = (16-2x)^2 \cdot x$$

$V = (16-2x)^2 \cdot x$

$V = (256 - 64x + 4x^2) \cdot x$

$V = 4x^3 - 64x^2 + 256x$

$f(x) = 4x^3 - 64x^2 + 256x$

$f`(x) = 12x^2 - 128x + 256$

Extremstelle → $f`(x) = 0$

$12x^2 - 128x + 256 = 0 \quad |:4$

$3x^2 - 32x + 64 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4.a.c)}}{2.a}$

$x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4.3.64)}}{2.3}$

$x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024-768}}{6}$

$x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{256}}{6}$; → $x_{1,2} = \frac{32 \pm 16}{6}$;

$x_1 = \frac{48}{6} = 8$; → *{keine mögliche Lösung!}*

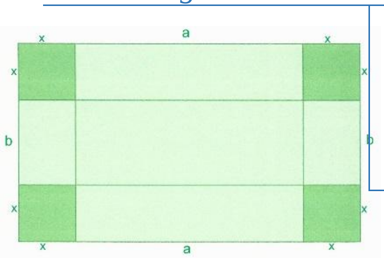
$\mathbf{x_2 = \frac{16}{6} = 2{,}66\ cm}$

$V = (16-2x)^2 \cdot x \quad \rightarrow \quad V = 10{,}68^2 \cdot 2{,}66$

$\mathbf{V = 303{,}406\ cm^3}$

Die Seite x ist 2,66 cm lang, das maximale Volumen beträgt 303,406 cm³.

Aus einem recheckigen Blechstück mit den Seitenlänge a=18 cm und b=12 cm soll eine quaderfürmige Dose mit maximalem Volumen hergestellt werden. An den Ecken werden gleich große Quadrate mit der Seite x ausgeschnitten. Berechnen Sie x und das Volumen der Dose!



1. Hauptbedingung: **V = G . h** → V *soll möglichst groß sein!*
2. Nebenbedingung: a = 18 – 2x; b = 12 – 2x; h = x;
3. Erstellung einer Zielfunktion f(x) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$$V = G \cdot h \quad \rightarrow \quad V = (18-2x) \cdot (12-2x) \cdot x$$

$V = (18-2x) \cdot (12-2x) \cdot x$

$V = (216 - 24x - 36x - 4x^2) \cdot x$

$V = -4x^3 - 60x^2 + 216x$

$f(x) = -4x^3 - 60x^2 + 216x$

$f`(x) = -12x^2 - 120x^2 + 216$

Extremstelle → $f`(x) = 0$

$-12x^2 - 120x^2 + 216 = 0 \quad |:(-12)$

$x^2 + 10x - 18 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 18}$

$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{43}$

$x_{1,2} = -5 \pm 6{,}55$

$\mathbf{x_1 = 1{,}55\ cm}$;

$\{x_2 = -11{,}55;\}$

$V = (18-2x) \cdot (12-2x) \cdot x$

$V = (18-3{,}1) \cdot (12-3{,}1) \cdot 1{,}55$

$V = 14{,}9 \cdot 8{,}9 \cdot 1{,}55$

$\mathbf{V = 205{,}545\ cm^3}$

Die Seite x ist 1,55 cm lang, das maximale Volumen beträgt 205,545 cm³.