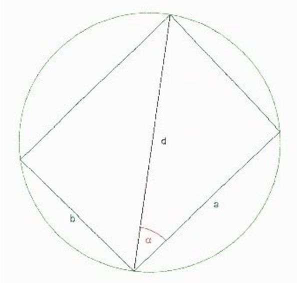
Funktionen – Extremwertaufgaben

Arbeitsblatt 3

Einem Kreis mit dem Radius r = 12 cm soll ein inhaltgrößtes Rechteck eingeschrieben werden. Benützen Sie für die Berechnung der Rechteckseiten den Winkel zwischen Diagonale und Rechteckseite!



1. Hauptbedingung: **$A = a \cdot b$** → A *soll möglichst groß sein!*
2. Nebenbedingung: $a = 2.r.\cos\alpha$; $b = 2.r.\sin\alpha$;
3. Erstellung einer Zielfunktion f(α) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$A = 2.r.\cos\alpha \,.\, 2.r.\sin\alpha$ → **$A = 4.r^2.\sin\alpha \,.\, \cos\alpha$**

A =
A =

$f(\alpha) = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$
$f`(\alpha) =$
$f`(\alpha) =$
$f`(\alpha) =$

Extremstelle → $f`(\alpha) = 0$

$\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$

$\alpha = 45°$

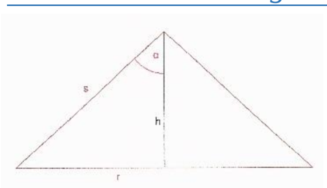
$a = 2.r.\cos\alpha$
a =
$a = 16{,}97$ cm

$b = 2.r.\sin\alpha$
b =
b =

Der Winkel α hat 45°, daher ist das eingeschriebene Rechteck ein Quadrat: a = b;

$A = a \,.\, b$ → A = → **$A = 287{,}98\ cm^2$**

Ein Zelt hat die Form eines Drehkegels mit der Seite s = 7 m. Berechnen Sie den Winkel, den die Seite mit der Höhe des Kegels einschließen muss, damit das Volumen möglichst groß wird!



1. Hauptbedingung: **$V = G \,.\, h$** → V *soll möglichst groß sein!*
2. Nebenbedingung: $r = s \,.\, \sin\alpha$; $h = s \,.\, \cos\alpha$;
3. Erstellung einer Zielfunktion f(α) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

→ $V = \frac{1}{3} \,.\, r^2 \,.\, \pi \,.\, h$ → $V = \frac{1}{3} \,.\, (s \,.\, \sin\alpha)^2 \,.\, (s \,.\, \cos\alpha)$;

V =

V =

$V = \frac{1\,.\,343}{3}$.

$f(\alpha) = \sin^2\alpha \,.\, \cos\alpha$
$f`(\alpha) =$
Extremstelle → $f`(\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$; → *{ } keine Lösung!*

$2.\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\alpha = 54{,}73°$

$r = 7 \,.\, \sin\alpha = 5{,}71$ m
$h = 7 \,.\, \cos\alpha = 4{,}04$ m

$V = \frac{1}{3} \,.\, r^2 \,.\, \pi \,.\, h$
V =
$V = 137{,}93\ m^3$