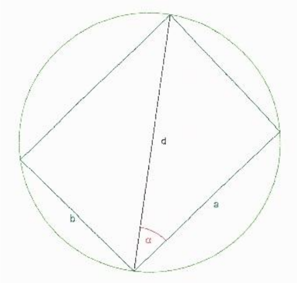
Funktionen – Extremwertaufgaben

Lösungsblatt 3

Einem Kreis mit dem Radius r = 12 cm soll ein inhaltgrößtes Rechteck eingeschrieben werden. Benützen Sie für die Berechnung der Rechteckseiten den Winkel zwischen Diagonale und Rechteckseite!



1. Hauptbedingung: **$A = a \cdot b$** → A *soll möglichst groß sein!*
2. Nebenbedingung: $a = 2 \cdot r \cdot \cos\alpha$; $b = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha$;
3. Erstellung einer Zielfunktion f(α) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$A = 2 \cdot r \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\alpha$ → **$A = 4 \cdot r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$**

$A = 4 \cdot r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$A = 4 \cdot 12^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$f(\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$f'(\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + (-\sin\alpha \cdot \sin\alpha)$
$f'(\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$f'(\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

Extremstelle → $f'(\alpha) = 0$

$\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$
$2\cos^2\alpha = 1$
$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\alpha = 45°$

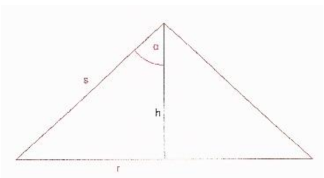
$a = 2 \cdot r \cdot \cos\alpha$
$a = 2 \cdot 12 \cdot \cos 45°$
$a = 16{,}97$ cm

$b = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha$
$b = 2 \cdot 12 \cdot \sin 45°$
$b = 16{,}97$ cm

Der Winkel α hat 45°, daher ist das eingeschriebene Rechteck ein Quadrat: $a = b$;

$A = a \cdot b$ → $A = 16{,}97^2$ → **$A = 287{,}98\ cm^2$**

Ein Zelt hat die Form eines Drehkegels mit der Seite s = 7 m. Berechnen Sie den Winkel, den die Seite mit der Höhe des Kegels einschließen muss, damit das Volumen möglichst groß wird!



1. Hauptbedingung: **$V = G \cdot h$** → V *soll möglichst groß sein!*
2. Nebenbedingung: $r = s \cdot \sin\alpha$; $h = s \cdot \cos\alpha$;
3. Erstellung einer Zielfunktion f(α) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

→ $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ → $V = \frac{1}{3} \cdot (s \cdot \sin\alpha)^2 \cdot (s \cdot \cos\alpha)$;

$V = \frac{1}{3} \cdot (s \cdot \sin\alpha)^2 \cdot (s \cdot \cos\alpha)$
$V = \frac{1}{3} \cdot (7 \cdot \sin\alpha)^2 \cdot (7 \cdot \cos\alpha)$
$V = \frac{1 \cdot 343}{3} \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

$f(\alpha) = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$
$f'(\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha \cdot (-\sin\alpha)$

Extremstelle → $f'(\alpha) = 0$

$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 0$
$\sin\alpha \cdot (2 \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$
$\sin\alpha = 0$; → { } *keine Lösung!*

$2 \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$
$2 \cdot \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 0$
$2 \cdot \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$
$3 \cdot \cos^2\alpha = 1$
$\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\alpha = 54{,}73°$

$r = 7 \cdot \sin\alpha = 5{,}71$ m
$h = 7 \cdot \cos\alpha = 4{,}04$ m

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot 5{,}71^2 \cdot \pi \cdot 4{,}04$
$V = 137{,}93\ m^3$