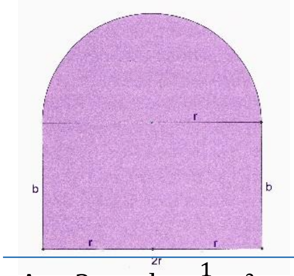
Funktionen – Extremwertaufgaben

Lösungsblatt 5

Damit in einen Ausstellungsraum mehr Tageslicht fällt, soll an einer Außenwand ein Fenster mit einem Umfang von 60 m und mit größtmöglichen Flächeninhalt eingebaut werden. **→ *Siehe Skizze!***
Berechnen Sie die Größen r und b und den Flächeninhalt des Fensters!



1. Hauptbedingung: $\mathbf{A = 2 \cdot r \cdot b + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi}$ → *A soll möglichst groß sein!*

2. Nebenbedingung: aus der Ähnlichkeit von Dreiecken:

$U = 2 \cdot r + 2 \cdot b + r \cdot \pi \rightarrow 2 \cdot b = U - 2 \cdot r - r \cdot \pi$

$\rightarrow \quad \mathbf{b = \frac{60 - 2 \cdot r - r \cdot \pi}{2}}$

3. Erstellung einer Zielfunktion f(r) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$A = 2 \cdot r \cdot b + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$

$A = 2 \cdot r \cdot \frac{60 - 2 \cdot r - r \cdot \pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$

$A = 60r - 2 \cdot r^2 - r^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$

$A = 60r - r^2 \cdot (2 + \pi - \frac{1}{2} \cdot \pi)$

$\underline{A = 60r - r^2 \cdot (2 + 0{,}5 \cdot \pi)}$

$f(r) = 60r - r^2 \cdot (2 + 0{,}5 \cdot \pi)$

Extremstelle $\rightarrow f'(r) = 0$

$f'(r) = 60 - 2 \cdot r \cdot (2 + 0{,}5 \cdot \pi)$

$60 - 2 \cdot r \cdot (2 + 0{,}5 \cdot \pi) = 0$

$2 \cdot r \cdot (2 + 0{,}5 \cdot \pi) = 60$

$r \cdot (2 + 0{,}5 \cdot \pi) = 30$

$r = \frac{30}{2 + 0{,}5 \cdot \pi}$;

$\underline{\mathbf{r \approx 8{,}4\ m}}$

$b = \frac{60 - 2 \cdot r - r \cdot \pi}{2}$

$b = \frac{60 - 2 \cdot 8{,}4 - 8{,}4 \cdot \pi}{2}$

$\underline{\mathbf{b \approx 8{,}4\ m}}$

$A = 2 \cdot r \cdot b + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$

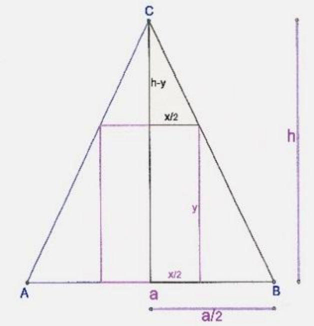
$A = 2 \cdot 8{,}4 \cdot 8{,}4 + \frac{1}{2} \cdot 8{,}4^2 \cdot \pi$

$\underline{\mathbf{A \approx 252\ m^2}}$

Die Fläche des Fensters ist rund 252 m² groß, r und b sind je rund 8,4 m lang.

Ein Rechteck hat die Abmessungen x = 4 m, y = 6 m. Diesem Rechteck soll das flächenkleinste gleich – schenkelige Dreieck umschrieben werden. (Eine Recheckseite liegt in der Basis a der Dreiecks!)
Zu berechnen sind: die Seiten, die Höhe und der Flächeninhalt des gleichschenkeligen Dreiecks!

→ *Siehe Skizze!*



1. Hauptbedingung: $\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h}$ → *A soll möglichst klein sein!*

2. Nebenbedingung: aus der Ähnlichkeit von Dreiecken:

$\mathbf{h : \frac{a}{2} = h - y : \frac{x}{2} \rightarrow \frac{a}{2} \cdot (h - y) = h \cdot \frac{x}{2} \rightarrow a \cdot (h - y) = h \cdot x}$

$\mathbf{\rightarrow a = \frac{h \cdot x}{h - y} \rightarrow a = \frac{h \cdot 4}{h - 6}}$

3. Erstellung einer Zielfunktion f(h) aus der Haupt- und Nebenbedingung:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot 4}{h - 6} \cdot h \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot h^2}{h - 6} \rightarrow A = \frac{h^2}{h - 6}$

$f(h) = \frac{h^2}{h - 6}$

$f'(h) = \frac{2 \cdot h \cdot (h - 6) - h^2 \cdot 1}{(h - 6)^2}$

Extremstelle $\rightarrow f'(h) = 0$

$\frac{2 h^2 - 12 h - h^2}{(h - 6)^2} = 0 \quad | \cdot (h-6)^2$

$h^2 - 12 \cdot h = 0$

$h \cdot (h - 12) = 0$

$h_1 = 0$; → {} keine Lösung

$h_2 - 12 = 0$; $\underline{\mathbf{h_2 = 12\ m}}$

$a = \frac{h \cdot 4}{h - 6}$

$a = \frac{12 \cdot 4}{12 - 6}$

$a = \frac{48}{6}$

$\underline{\mathbf{a = 8\ m}}$

$b^2 = (\frac{a}{2})^2 + h^2$

$b^2 = 4^2 + 12^2$

$b^2 = 160$

$\underline{\mathbf{b \approx 12{,}65\ m}}$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12$

$\underline{\mathbf{A = 48\ m^2}}$

Das Dreieck hat eine Fläche von 48 m², die Seite sind 8 m und 12,65 m lang, die Höhe ist 12 m lang.

Autor: Robert Kohout | **Thema:** Funktionen, Extremwertaufgaben, Hauptbedingung, Nebenbedingung, Zielfunktion