

Gleichungen – Die Gleichung der Ellipse

Lösungsblatt 2

Von einer Ellipse in 1. Hauptlage $[M(0/0)]$ kennt man die Punkte $S(3/-4)$ und $T(6/2)$.

Ermitteln Sie die Gleichung der Ellipse und die Koordinaten der Scheitelpunkte und Brennpunkte!

Gleichung der Ellipse in 1. Hauptlage: ell: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. ell: $x^2 \cdot b^2 + y^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot b^2$;

I: $\frac{3^2}{a^2} + \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$ $S(3/-4)$	$\frac{6^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$	A(-3.√5 / 0) B(+3.√5 / 0) C(0 / +2.√5) D(0 / -2.√5) F₁(-5 / 0) F₂(+5 / 0)
II: $\frac{6^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$ $T(6/2)$	$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \cdot 5$	
I: $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \cdot 4$	$\frac{180}{a^2} + 1 = 5 \rightarrow 4a^2 = +180$	ell: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ $20 \cdot x^2 + 45 \cdot y^2 = 900$; ell: $4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 180$; ell: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $e^2 = 25 - 16; \quad e^2 = 9; \quad e = \pm 3$
II: $\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \cdot (-1)$	$a^2 = +45 \rightarrow a = \pm 3\sqrt{5}$	
	<u>a² = +45</u> <u>b² = +20</u>	
I: $\frac{36}{a^2} + \frac{64}{b^2} = 4$	$e^2 = a^2 - b^2$	ell: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ $20 \cdot x^2 + 45 \cdot y^2 = 900$; ell: $4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 180$; ell: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $e^2 = 25 - 16; \quad e^2 = 9; \quad e = \pm 3$
II: $-\frac{36}{a^2} - \frac{4}{b^2} = -1$	$e^2 = 45 - 20$	
$+\frac{60}{b^2} = +3$	$e^2 = 25; \quad e = \pm 5$	
$3b^2 = +60$		
$b^2 = +20; \rightarrow b = \pm 2\sqrt{5}$		

Von einer Ellipse ell: $16 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 400$ sollen die Längen der Hauptachse AB und der Nebenachse CD sowie die Koordinaten der Scheitelpunkte A,B,C,D und der Brennpunkte F₁ und F₂ berechnet werden.

ell: $16 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 400$ **a² = +25;** $\rightarrow a = \pm 5;$ $e^2 = a^2 - b^2$
 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **b² = +16;** $\rightarrow b = \pm 4;$ $e^2 = 25 - 16; \quad e^2 = 9; \quad e = \pm 3$

Länge der Hauptachse **AB = 2 · a = 10**
 Länge der Nebenachse **CD = 2 · b = 8**

Koordinaten der Brennpunkte: **F₁(-3 / 0); F₂(+3 / 0);**

Von einer Ellipse kennt man F₁(-6/0), F₂(+6/0) und den Punkt X(0/8) auf der Ellipse.

Ermitteln Sie die Gleichung der Ellipse und die Koordinaten der Scheitelpunkte.

Definition der Ellipse: $|F_1X| + |F_2X| = 2 \cdot a$

$ F_1X = \left \frac{x_{F1} - x_X}{y_{F1} - y_X} \right = \left \frac{-6 - 0}{0 - 8} \right = \left \frac{-6}{-8} \right ; \quad F_1X = \sqrt{36 + 64} = 10$	$b^2 = a^2 - e^2$	ell: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ell: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ell: $64x^2 + 100y^2 = 6400$
$ F_2X = \left \frac{x_{F2} - x_X}{y_{F2} - y_X} \right = \left \frac{+6 - 0}{0 - 8} \right = \left \frac{+6}{-8} \right ; \quad F_2X = \sqrt{36 + 64} = 10$	$b^2 = 10^2 - 6^2$	
$2a = 10 + 10; \quad a = 10; \quad e = F_1M \quad e = 6;$	$b^2 = 100 - 36$	
	$b = \sqrt{64}$	
	b = ± 8	

Koordinaten der Scheitelpunkte:
A(-10 / 0); B(+10 / 0); C(0 / +8); D(0 / -8);