

Gleichungen – Schnitt- und Berührungsaufgaben

Lösungsblatt 3

Berührungsbedingungen (BB) für Kegelschnitte in 1. Hauptlage:

Ellipse: $d^2 = a^2 \cdot k^2 + b^2$

Hyperbel: $d^2 = a^2 \cdot k^2 - b^2$

Parabel: $p = 2 \cdot k \cdot d$

Spaltform der Tangentengleichungen für Kegelschnitte in 1. Hauptlage:

Ellipse:

$t_{ell}: b^2 \cdot x \cdot x_T + a^2 \cdot y \cdot y_T = a^2 \cdot b^2$

Hyperbel:

$t_{hyp}: b^2 \cdot x \cdot x_T - a^2 \cdot y \cdot y_T = a^2 \cdot b^2$

Parabel:

$t_{par}: y y_T = p \cdot (x + x_T)$

Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P(+9/+6)$ an die Hyperbel $hyp: x^2 - y^2 = 60$ gelegt werden können? $t_{hyp}: y = k \cdot x + d$

BB: $d^2 = a^2 \cdot k^2 - b^2$;

$x^2 - y^2 = 60 \rightarrow \frac{x^2}{60} - \frac{2y^2}{60} = 1$
 $a^2 = 60; b^2 = 60;$

$t_{hyp}: y = k \cdot x + d \rightarrow P(+9/+6); P \in t$
 $6 = k \cdot 9 + d \rightarrow d = 6 - 9 \cdot k$

$d^2 = a^2 \cdot k^2 - b^2$

$(6 - 9 \cdot k)^2 = 60 \cdot k^2 - 60$

$\|k_1 = +4; k_2 = +\frac{8}{7};$

$36 - 108k + 81k^2 = 60k^2 - 60$

$\|$

$96 - 108k + 21k^2 = 0 \quad | :3$

$\| d = 6 - 9 \cdot k$

$7k^2 - 36k + 32 = 0$

$\| d_1 = 6 - 9 \cdot 4; \rightarrow d_1 = -30$

$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$\| d_2 = 6 - 9 \cdot \frac{8}{7} \rightarrow d_2 = -\frac{30}{7}$

$k_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{(36)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 32}}{2 \cdot 7}$

$t_{hyp}: (vom\ Punkt\ P) \quad y = k \cdot x + d: \quad \underline{t_{hyp}: y = +4x - 30}$

$k_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{400}}{14} \quad k_{1,2} = \frac{36 \pm 20}{14}$

$t_{hyp}: y = +\frac{8}{7}x - \frac{30}{7} \rightarrow +8x - 7y = 30$

Berechnung der Koordinaten der Berührungspunkte T_1 und T_2

$hyp: x^2 - y^2 = 60 \cap \underline{t_{hyp}: y = +4x - 30}$

$hyp: x^2 - y^2 = 60 \cap \underline{t_{hyp}: y = +\frac{8}{7}x - \frac{30}{7}}$

$x^2 - (+4x - 30)^2 = 60$

$x^2 - (+\frac{8}{7}x - \frac{30}{7})^2 = 60$

$x^2 - (+16x^2 - 240x + 900) = 60$

$x^2 - (+\frac{64}{49}x^2 - \frac{480}{49}x + \frac{900}{49}) = 60 \quad | \cdot 49$

$x^2 - 16x^2 + 240x - 960 = 0$

$49x^2 - 64x^2 + 480x - 3840 = 0$

$15x^2 - 240x + 960 = 0 \quad | :15$

$15x^2 - 480x + 3840 = 0 \quad | :15$

$x^2 - 16x + 64 = 0$

$x^2 - 32x + 256 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{16}{2} \pm \sqrt{(\frac{16}{2})^2 - 64}$

$x_{1,2} = \frac{32}{2} \pm \sqrt{(\frac{32}{2})^2 - 256}$

$\underline{x = +8}$

$y = +4x - 30$

$\underline{x = +16}$

$y = +\frac{8}{7}x - \frac{30}{7}$

$\underline{y = +2}$

$\underline{y = +14}$

$\underline{T_1 = (+8 / +2)}$

$\underline{T_2 = (+16 / +14)}$